Ancien Programme	**BAC BLANC** 2007-08	MATHEMATIQUES	*Mr ABIDI Farid*

EXERCICE 1

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires .

On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire , on la place dans l'urne B ,
- sinon , on l'écarte du jeu .

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B . On considère les événements suivants :

R_1 **: « la boule tirée de A est rouge »** N_1 **: « la boule tirée de A est noire »**

R_2 **: « la boule tirée de B est rouge »** N_2 **: « la boule tirée de B est noire »**

1) a) Déterminer les probabilités des événements R_1 et N_1 .

b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 » .

En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.

c) Calculer la probabilité de N_2 .

2) On répète n fois l'épreuve précédente (*tirage d'une boule de A , suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus*) , en supposant les différentes épreuves indépendantes .

Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 2

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm .

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^3 - 8 = 0$.

2) On considère dans le plan $\mathcal{P}$ les points A , B et C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

a) Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique . Placer les points A , B et C .

b) Déterminer la nature du triangle ABC .

3) On considère l'application f du plan dans lui-même qui , à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' telle que : $z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z$.

a) Caractériser géométriquement l'application f .

b) Déterminer les images des points A et C par f. En déduire l'image de la droite (AC) par f .

PROBLEME

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - e^{2x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$;
(*On prendra 5 cm comme unité*)

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b) Vérifier que , pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) a) Déterminer f '. Etudier le signe de f '(x).

   b) Dresser le tableau de variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f .

3) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) .

   Etudier la position relative de (C) et (D) .

4) On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1 .

   Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C) .

5) a) On note I l'intervalle [0 ; 0,5] .

   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a .

   b) Déterminer un encadrement de a d'amplitude 10^{-1}.

6) Construire la courbe (C) , l'asymptote (D) et la tangente (T) .

PARTIE B

On définit dans IR la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$.

1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{2x-2}$.

   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(a)$.

2) Démontrer que , pour tout réel x de l'intervalle I , on a : $|g'(x)| \le \frac{2}{e}$.

3) Démontrer que , pour tout réel x de l'intervalle I , $g(x)$ appartient à I .

4) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que , pour tout entier naturel n :

$$|U_{n+1} - a| \le \frac{2}{e}|U_n - a| .$$

5) Démontrer , par récurrence ou par une autre méthode de votre choix , que : $|U_n - a| \le \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

6) En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite .

7) Déterminer un entier naturel p tel que : $|U_p - a| < 10^{-5}$.

8) En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près .

Eléments de correction.

Exercice 1 : probabilités.

① a) Univers Ω : ensemble des issues lors du tirage au hasard d'une boule dans une urne A.

Evénement R_1 : « la boule tirée de A est rouge ». Evénement N_1 : « la boule tirée de A est noire ».

L'urne A contenant 2 boules rouges et 3 noires, et les issues du tirage étant équiprobables (boules indiscernables), on a : $p(R_1)=\dfrac{card\ R_1}{card\ \Omega}=\boxed{\dfrac{2}{5}}$ et $p(N_1)=\dfrac{card\ N_1}{card\ \Omega}=\boxed{\dfrac{3}{5}}$.

b) Sachant R_1 : une seconde urne B, qui contient initialement 3 boules rouges et 2 noires, reste inchangée.

On tire au hasard une boule de l'urne B.

Evénement R_2 : « la boule tirée de B est rouge ». Evénement N_2 : « la boule tirée de B est noire ».

On a ainsi : $p(R_2|R_1)=\boxed{\dfrac{3}{5}}$ [et $p(N_2|R_1)=\dfrac{2}{5}$]

Sachant N_1 : la boule noire tirée de A a été ajoutée dans l'urne B (avant le tirage de la boule dans B).

On a ainsi : $p(R_2|N_1)=\dfrac{3}{6}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ [et $p(N_2|N_1)=\dfrac{1}{2}$]

Naturellement, on peut alors planter un arbre, et mettre sur ses branches les fruits de ces calculs …

Les événements R_1 et N_1 forment une partition de l'univers (des résultats des deux tirages).

D'où : les événements $R_2\cap R_1$ et $R_2\cap N_1$ forment une partition de l'événement R_2.

Par conséquent : $p(R_2)=p(R_2\cap R_1)+p(R_2\cap N_1)$.

Puis, selon la définition des probabilités conditionnelles :

$p(R_2)=p(R_1)\times p(R_2|R_1)+p(N_1)\times p(R_2|N_1)$ [formule dite « des probabilités totales »]

Application numérique : $p(R_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{25}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{12+15}{50}=\boxed{\dfrac{27}{50}}$.

c) L'événement N_2 est le contraire de R_2, donc $p(N_2)=p(\overline{R_2})=1-p(R_2)=\boxed{\dfrac{23}{50}}$.

② On répète n fois, dans les mêmes conditions initiales, l'épreuve précédente (constituée du tirage au hasard d'une boule dans l'urne A suivi du tirage d'une boule dans l'urne B).

Pour chacune de ces n épreuves, on appelle « succès » l'événement R_2 ; la seule autre issue (l'échec) est N_2 ; il y a 2 issues possibles. La probabilité de succès, pour chaque épreuve, vaut $p=p(R_2)=\dfrac{27}{50}=0,54$.

On suppose que les n épreuves sont indépendantes. On est alors en présence d'un schéma de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès au cours des n épreuves. Selon le cours, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k\ 0,54^k\ 0,46^{n-k}$.

[On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.]

On cherche à déterminer l'entier n minimal tel que : $p(X\geq 1)>0,99$ (i)

(i) $\Leftrightarrow\ 1-p(X=0)>0,99\ \Leftrightarrow\ p(X=0)<0,01\ \Leftrightarrow\ 0,46^n<0,01$

$\Leftrightarrow\ n\ln 0,46<\ln 0,01$ [car la fonction ln est strictement croissante, et $\ln(a^n)=n\ln a$]

$\Leftrightarrow\ n>\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,46}$ [car $\ln 0,46<0$]

Or, $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,46}\approx 5,93$. Donc $\boxed{n\geq 6}$. On doit réaliser au minimum 6 essais pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99.

Exercice 2 : nombres complexes.

① Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3-8=0$.

$z=2$ en est une solution évidente (triviale).

Le polynôme z^3-8 peut donc être factorisé par $z-2$. On obtient : $\boxed{z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)}$

[en posant la division, ou en utilisant l'algorithme de Hörner, ou la méthode des coefficients indéterminés]. Ainsi : (E) équivaut à $z-2=0$ ou $z^2+2z+4=0$ (règle du produit nul).

Le discriminant du trinôme du second degré z^2+2z+4 est : $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$.

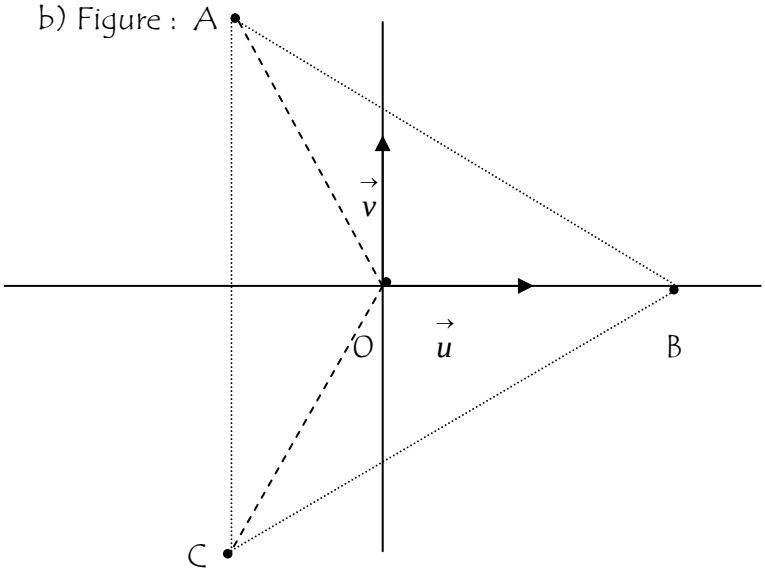
Donc ce polynôme possède deux racines complexes conjuguées : $z=\dfrac{-2\pm i\sqrt{12}}{2\times1}=\boxed{-1\pm i\sqrt{3}}$.

D'où les trois solutions de (E) : $z_A=-1+i\sqrt{3}$; $z_B=2$ et $z_C=-1-i\sqrt{3}$.

② a) $z_A=-1+i\sqrt{3}$, donc $|z_A|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, et par conséquent

$z_A=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=\boxed{2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}$. De même : $z_C=\overline{z_A}=\boxed{2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$.

b) Figure : A



c) On a : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-2i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\dfrac{-2i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{-2i\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{1\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

donc $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\dfrac{AC}{AB}=1$, c'est-à-dire $\boxed{AC = AB}$,

et $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\boxed{mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{3}}\left(\mathrm{mod}\,2\pi\right)$.

Par conséquent, le triangle $\boxed{ABC \text{ est équilatéral}}$ (indirect).

③ Soit f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M', d'affixe $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

a) f est la $\boxed{\underline{\text{rotation}} \text{ de centre O et d'angle de mesure } \dfrac{2\pi}{3} \text{ radians}}$. [pour s'en convaincre pleinement, il suffit d'interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'}{z}$]

b) L'image de A par f a pour affixe : $z_A'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}=2\,e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)}=2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}=z_C$

De même : $z_C'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}=2\,e^{i0}=2=z_B$. D'où : $\boxed{f(A)=C}$ et $\boxed{f(C)=B}$.

Par conséquent : l'image de la droite (AC) par f est la droite $\left(f(A)\,f(C)\right)$, c'est-à-dire $\boxed{(BC)}$.

PROBLEME , partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-e^{2x-2}$.

① a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0^+$, donc (composée) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x-2}=0^+$.

D'où (différence) : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x=\boxed{-\infty}$.

b) Pour tout x réel non nul : $f(x)=x\left(1-\dfrac{e^{2x-2}}{x}\right)=x\left(1-\dfrac{e^{-2}e^{2x}}{x}\right)=\boxed{x\left[1-2e^{-2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)\right]}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ (croissance comparée, selon le formulaire)

donc (composée) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}=+\infty$; par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}1-2e^{-2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)=-\infty$ (car $2e^{-2}>0$)

D'où (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\boxed{-\infty}$.

② f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée et différence de fonctions dérivables.

On sait que : $\left(e^u\right)'=u'e^u$, où u est une fonction dérivable. D'où : quel que soit x réel, $f'(x)=\boxed{1-2e^{2x-2}}$.

On a : $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x-2}=\dfrac{1}{2} \underset{(i)}{\Leftrightarrow} 2x-2=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2 \Leftrightarrow x=\boxed{\dfrac{2-\ln 2}{2}}\approx 0{,}65$.

Et : $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x-2}<\dfrac{1}{2} \underset{(ii)}{\Leftrightarrow} 2x-2<-\ln 2 \Leftrightarrow x<\dfrac{2-\ln 2}{2}$

Les équivalences (i) et (ii) sont dues au fait que la fonction ln (ou exp) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

De plus : $x=\dfrac{2-\ln 2}{2} \Leftrightarrow e^{2x-2}=\dfrac{1}{2}$, donc $f\left(\dfrac{2-\ln 2}{2}\right)=\dfrac{2-\ln 2}{2}-\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{1-\ln 2}{2}}\approx 0{,}15$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\dfrac{2-\ln 2}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variation de $f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1-\ln 2}{2}$	↘	$-\infty$

③ Pour tout x réel, on a : $\boxed{f(x)-x=-e^{2x-2}}$.

Or, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}-e^{2x-2}=0^{(-)}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-e^{2x-2}=-\infty$ (aisément détaillable).

Donc la droite D d'équation $y=x$ est <u>asymptote</u> (oblique) à la courbe C représentative de f, au voisinage de $-\infty$, et pas au voisinage de $+\infty$.

De plus, pour tout x réel : $\boxed{-e^{2x-2}<0}$, car une exponentielle est toujours à valeurs strictement positives.

Donc <u>C est située au-dessous de D</u> .

④ Soit A le point de C d'abscisse 1. Soit T la <u>tangente</u> à C en A.

L'équation réduite de T est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Or, $f(1)=1-e^0=0$ et $f'(1)=1-2e^0=-1$. D'où l'équation de T : $\boxed{y=-x+1}$.

⑤ Soit l'intervalle $I=[0\,;0{,}5]$. On a : $I\subset\left]-\infty\,;\dfrac{2-\ln 2}{2}\right[$.

La fonction f est définie, dérivable, strictement croissante (car sa dérivée est strictement positive) sur I.

Donc l'image de I par f est l'intervalle de même nature (fermé) $J=\left[f(0)\,;f(0{,}5)\right]=\left[-e^{-2}\,;\dfrac{1}{2}-e^{-1}\right]$,

et f réalise une bijection de I sur J.

Or, 0 appartient à J, car $-e^{-2}<0$ et $\dfrac{1}{2}-e^{-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-2}{2e}>0$ (car $e\approx 2{,}718>2$).

Donc 0 possède un unique antécédent par f dans I (existence et unicité de cet antécédent),

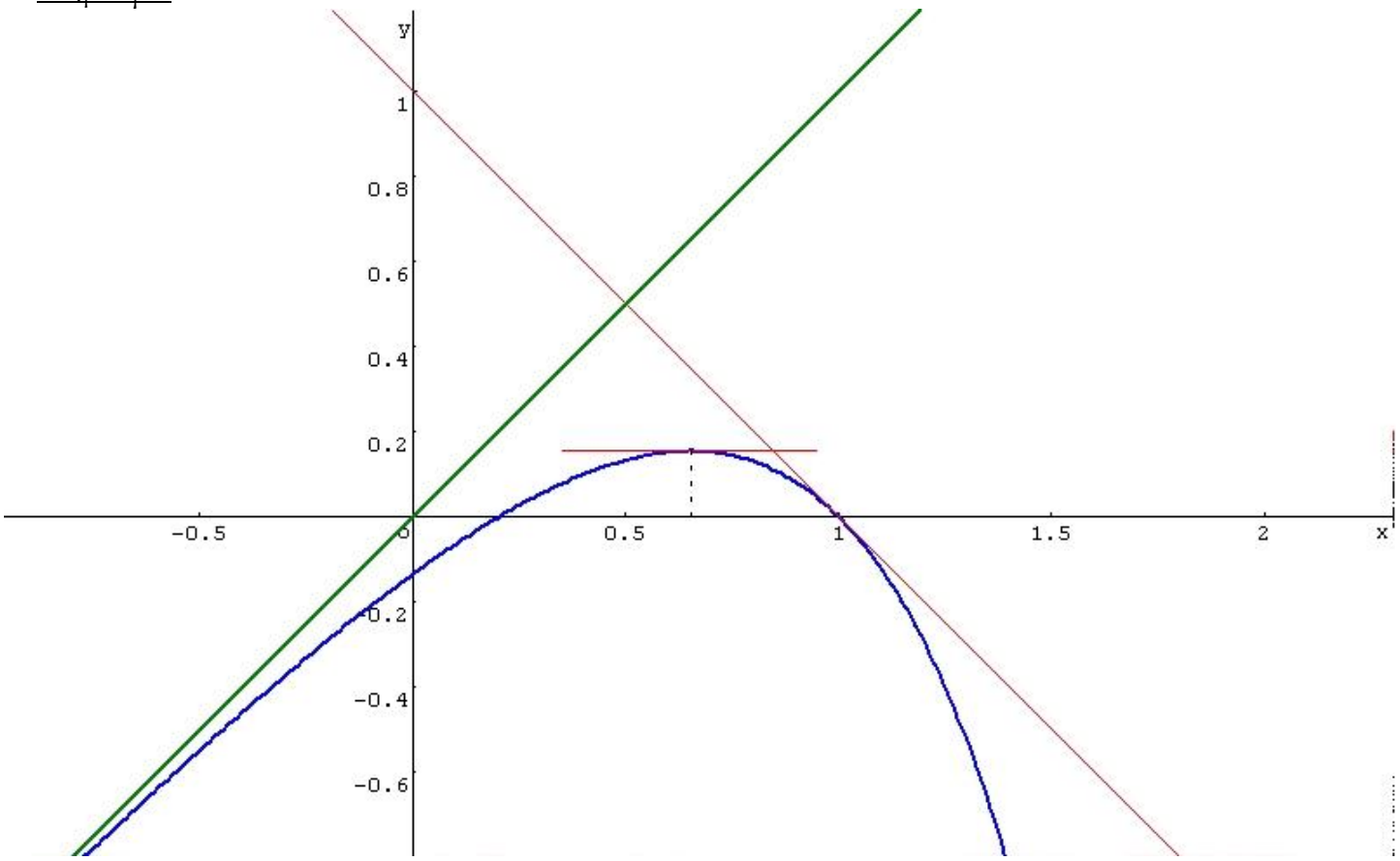
c'est-à-dire : l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans I, solution notée a.

De plus (avec la calculatrice) : $f(0{,}2)=0{,}2-e^{-1{,}6}\approx\boxed{-0{,}002}$ et $f(0{,}3)=0{,}3-e^{-1{,}4}\approx\boxed{0{,}05}$; $f(a)=0$.

Ainsi : $f(0{,}2)<f(a)<f(0{,}3)$, où les trois réels 0,2 , a et 0,3 appartiennent à I.

Donc $\boxed{0{,}2<a<0{,}3}$, car f est strictement croissante sur I.

⑥ Graphique :



PROBLEME, partie B :

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=e^{2U_n-2}=g(U_n)\end{cases}$

où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x-2}$.

① $f(x)=0\ \Leftrightarrow\ x-e^{2x-2}=0\ \Leftrightarrow\ e^{2x-2}=x\ \Leftrightarrow\ g(x)=x$.

D'où : $\boxed{g(a)=a}$, car $f(a)=0$; a est le point fixe de g sur I.

② g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions dérivables). Pour tout x réel : $g'(x)=2e^{2x-2}$.

$x \in I \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq 2x-2 \leq -1$

$\Leftrightarrow e^{-2} \leq e^{2x-2} \leq e^{-1}$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (0<)2e^{-2} \leq g'(x) \leq 2e^{-1} \Rightarrow |g'(x)| \leq 2e^{-1}$.

Ainsi : pour tout réel x de I, $\boxed{|g'(x)| \leq \frac{2}{e} (< 0,736)}$

③ On a : $x \in I \Leftrightarrow e^{-2} \leq e^{2x-2} \leq e^{-1} \Rightarrow 0 < e^{2x-2} < \frac{1}{2}$ car $e^{-2} > 0$ et $e^{-1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ (car $e > 2$)

Ainsi : pour tout réel x de I, $\boxed{g(x) \in I}$. Autrement dit : $g(I) \subset I$.

On en déduit, par <u>récurrence</u>, que pour tout entier naturel n, $\boxed{U_n \in I}$.

En effet : ✓ $U_0 = 0 \in I$.

✓ Supposons que, pour un entier n, $U_n \in I$.

Alors, comme $g(I) \subset I$, on en déduit que $g(U_n) \in I$, c'est-à-dire que $U_{n+1} \in I$.

✓ La propriété que l'on cherche à démontrer étant vraie au rang n=0, et étant héréditaire (transmissible du rang n au rang suivant), cette propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

④ Inégalité des <u>accroissements finis</u> : g est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I,

et $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$ pour tout réel x de I. Alors, comme a et U_n appartiennent à I, on déduit que :

$|g(U_n) - g(a)| \leq \frac{2}{e}|U_n - a|$, c'est-à-dire : $\boxed{|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|U_n - a|}$ (car $U_{n+1} = g(U_n)$ et $g(a) = a$).

⑤ Ceci pour tout entier naturel n. On peut alors écrire les n inégalités suivantes (toutes positives) :

$|U_n - a| \leq \frac{2}{e}|U_{n-1} - a|$; $|U_{n-1} - a| \leq \frac{2}{e}|U_{n-2} - a|$; … ; $|U_1 - a| \leq \frac{2}{e}|U_0 - a|$. En les multipliant membre

à membre, on obtient : $|U_n - a| \times |U_{n-1} - a| \times \cdots \times |U_1 - a| \leq \frac{2}{e}|U_{n-1} - a| \times \frac{2}{e}|U_{n-2} - a| \times \cdots \times \frac{2}{e}|U_0 - a|$.

Puis en simplifiant : $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n |U_0 - a|$.

Or, $|U_0 - a| \leq \frac{1}{2} < 1$, car U_0 et a appartiennent à I, intervalle d'amplitude $\frac{1}{2}$.

D'où : $\boxed{|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n}$ pour tout entier naturel n.

⑥ On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n = 0$ lorsque λ est un réel fixé compris entre 0 et 1 (strictement).

Ici, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$. Or, $0 \leq |U_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. Donc (théorème des gendarmes) $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - a| = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - a) = 0$, et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a}$. La suite (U_n) <u>converge</u> vers a.

⑦ Puisque $|U_p - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^p$, on a : $|U_p - a| < 10^{-5}$ si (condition suffisante) $\left(\frac{2}{e}\right)^p < 10^{-5}$

Or, $\left(\frac{2}{e}\right)^p < 10^{-5} \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{2}{e}\right)^p\right] < \ln(10^{-5}) \Leftrightarrow p \ln\frac{2}{e} < -5\ln 10 \Leftrightarrow p(\ln 2 - \ln e) < -5\ln 10$

$\Leftrightarrow p(\ln 2 - 1) < -5\ln 10 \Leftrightarrow p > \frac{-5\ln 10}{\ln 2 - 1}$ car $\ln 2 - 1 < 0$.

De plus : $\frac{-5\ln 10}{\ln 2 - 1} \approx 37,5$. Donc $\boxed{p \geq 38}$ (p entier).

⑧ Conclusion : $|U_{38} - a| < 10^{-5}$, donc U_{38} constitue une valeur approchée de a à 10^{-5} près.

A l'aide de la calculatrice, on obtient ainsi : $\boxed{a \approx 0,20318}$.